SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1995-96

Andrea Pascucci

ESISTENZA E NON-ESISTENZA DI SOLUZIONI GLOBALI PER IL PROBLEMA DI CAUCHY RELATIVO AD UNA CLASSE DI OPERATORI ULTRAPARABOLICI SEMILINEARI

23 maggio 1996

Tecnoprint - Bologna 1996

Riassunto. Proviamo alcuni risultati sull'esistenza e non-esistenza di soluzioni classiche non-negative del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} Lu = -u^{1+\alpha}, & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = a(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Abstract. We prove some results about the existence and non-existence of classical non-negative solutions of the initial value problem

$$\begin{cases} Lu = -u^{1+\alpha}, & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = a(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

1 Introduzione

In $\mathbb{R}^{N+1}$ consideriamo l'operatore differenziale del secondo ordine

$$L = div(A\nabla) + < x, B\nabla > -\partial_t \tag{1.1}$$

dove $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono matrici a coefficienti costanti, $\nabla = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_N})$, div e $<,>$ indicano rispettivamente il gradiente, la divergenza e il prodotto interno in $\mathbb{R}^N$. Con $z = (x,t)$ indichiamo un punto di $\mathbb{R}^{N+1}$. La matrice A è supposta simmetrica e semidefinita positiva. Assumiamo inoltre le seguenti ipotesi:

(H.1) *L è ipoellittico;*

(H.2) *esiste un gruppo di dilatazioni $(\lambda^M)_{\lambda>0}$, dove M è una matrice simmetrica e definita positiva in $\mathbb{R}^{N+1}$, rispetto a cui L è invariante, nel senso che*

$$L \circ \lambda^M = \lambda^2(\lambda^M \circ L) \qquad \forall \lambda > 0. \tag{1.2}$$

In questo seminario dimostriamo alcuni risultati sull'esistenza e non-esistenza globale di soluzioni classiche e non negative per il problema ai valori iniziali

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} Lu = -u^{1+\alpha}, & \text{in } S_\infty = \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = a(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

In (PC), il dato iniziale $a = a(x)$ è una funzione non negativa e sufficientemente regolare; α è un parametro positivo.

Come è ben noto, le soluzioni di problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali paraboliche quasilineari possono non esistere per ogni tempo. I primi risultati a questo riguardo sono stati ottenuti già negli anni '60 da Kaplan [8], Itô [7] e Friedman [2] nel caso di operatori parabolici del secondo ordine con parte principale uniformemente ellittica: precisamente, se il dato iniziale è "abbastanza grande", ogni soluzione diverge in un tempo finito, in altri termini si ha il cosiddetto fenomeno di blow-up. Per risultati analoghi più recenti si vedano anche [12] e [1]. D'altra parte Fujita [3] fu il primo a dimostrare che anche per dati iniziali "piccoli" possono non esistere soluzioni globali: in tale situazione la dimensione spaziale N e il grado di non-linearità α giocano un ruolo fondamentale. Seguendo il metodo esposto in [3] e in [8], proviamo che un risultato analogo vale per L; dimostriamo infatti, nel Teorema 1.4, che, se Q indica la dimensione omogenea di $\mathbb{R}^N$ rispetto a L, nel caso in cui $0 < \alpha Q < 2$, non esistono soluzioni globali (eccetto $u \equiv 0$), non negative e che siano $O(e^{|x|^\beta})$, per $|x| \to \infty$, per qualche $\beta < 2$ (cfr. Definizione 1.2); al contrario, se $\alpha Q > 2$, determiniamo una classe di valori iniziali per i quali esiste una soluzione globale di (PC). Esattamente come nel caso classico, la non-esistenza globale diviene inevitabile se α è abbastanza piccolo.

Richiamiamo ora alcune conseguenze delle ipotesi (H.1) e (H.2). Anzitutto (cfr. [5]) la (H.1) è equivalente all'ipotesi di Hörmander

$$\text{(H}'.1) \qquad rank\mathcal{L}(X_1,\dots,X_N,Y)(x) = N+1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

dove $X_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\partial_{x_j}$, $i = 1,\dots,N$, e $Y =< x, B\nabla > -\partial_t$.

Inoltre, se definiamo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$E(t) = \exp(-tB^T), \qquad C(t) = \int_0^t E(s)AE^T(s)ds, \tag{1.3}$$

(H.1) è equivalente a

$$\text{(H}''.1) \qquad C(t) > 0, \qquad \forall t > 0, \qquad \text{oppure} \qquad C(t) < 0, \qquad \forall t < 0.$$

In [11] è dimostrato che la condizione di Hörmander (H$'$.1) implica che esiste una base di $\mathbb{R}^N$ rispetto a cui le matrici A e B prendono la forma seguente:

Nel caso $L = H = \Delta_x - \partial_t$

$A = I_N = A_0$, $p_0 = N$, $p_1 = \dots = p_r = 0$

$\lambda^M = diag(\lambda I_N, \lambda^2) \Rightarrow$ (cilat. parabolicità)

$Q = N$

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & B_r \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

dove A_0 è una matrice quadrata di rango massimo p_0, B_j è un blocco $p_{j-1} \times p_j$ di rango p_j per $j = 1,\dots,r$; inoltre $p_0 \geq p_1 \geq \cdots \geq p_r \geq 1$ e $p_0 + p_1 + \cdots + p_r = N$. I blocchi $*$ sono, in generale, arbitrari, ma nell'ipotesi (H.2) sono matrici nulle. In questo caso le dilatazioni che commutano con L assumono la seguente forma

$$\lambda^M = \mathrm{diag}(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2)$$

dove I_{p_j} indica la matrice identità $p_j \times p_j$. Il numero $Q = p_0 + 3p_1 + \cdots + (2r+1)p_r$ è detto dimensione omogenea di $\mathbb{R}^N$ rispetto a L. Nel seguito indicheremo $D(\lambda) = \lambda^M$ e con $D_0(\lambda)$ la restrizione a $\mathbb{R}^N$ di λ^M.

Faremo inoltre uso dei seguenti risultati:

a) l'operatore L è invariante rispetto alle traslazioni a sinistra di un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^{N+1}$. Infatti, se definiamo

$$(x,t) \circ (y,s) = (y + E(s)x, t+s), \qquad (x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^{N+1},$$

è facile riconoscere che $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ è un gruppo con elemento neutro $(0,0)$, e

$$\ell_\zeta \circ L = L \circ \ell_\zeta$$

per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$, dove ℓ_ζ indica la traslazione a sinistra

$$\ell_\zeta \ : \ \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}, \qquad \ell_\zeta(z) = \zeta \circ z;$$

b) ([5], [10]) esiste la soluzione fondamentale di L, data esplicitamente da

$$\Gamma(z;\zeta) = \Gamma(\zeta^{-1} \circ z) \tag{1.4}$$

dove $\Gamma(x,t) = \Gamma(x,t;0,0) = 0$ per $t \leq 0$ e

$$\Gamma(x,t) = \frac{c_N}{t^{\frac{Q}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4} < C^{-1}(t)x, x >\right), \qquad t > 0, \tag{1.5}$$

dove $c_N = (4\pi)^{-\frac{N}{2}} (\det C(1))^{-\frac{1}{2}}$;

c) per ogni funzione $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$\lim_{t \to s^+} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;y,s)\varphi(y)dy = \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N; \tag{1.6}$$

d) vale la proprietà di riproduzione di Γ: per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^N$, $\tau < s < t$, risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;y,s)\Gamma(y,s;\xi,\tau)dy = \Gamma(x,t;\xi,\tau); \tag{1.7}$$

e) se Γ^* indica la soluzione fondamentale di L^*, operatore aggiunto formale di L, vale

$$\Gamma^*(z;\zeta) = \Gamma(\zeta;z). \tag{1.8}$$

Diamo ora la formulazione precisa del problema di Cauchy (PC).

DEFINIZIONE 1.1 *Sia T un numero non-negativo e $S_T = \mathbb{R}^N \times]0,T[$. Una funzione non-negativa $u \in C(\overline{S}_T)$ è detta soluzione regolare di (PC) in S_T, se le derivate $X_i X_j u$, $i,j = 1,\ldots,N$, e Yu, esistono e sono funzioni continue in S_T, e se (PC) è soddisfatta.*

Nella Definizione 1.1 non si sono poste condizioni sul comportamento della soluzione per $|x| \to \infty$; d'altra parte è noto che anche nel caso lineare, per ottenere risultati di unicità, occorre controllare la crescita della soluzione in modo tale che sia in qualche modo confrontabile con la soluzione fondamentale Γ. Sulla conoscenza esplicita di Γ si fondano, in ultima analisi, i principali risultati di questa nota. Il comportamento asintotico di Γ (cfr. (1.5)) rende naturale restringere la classe delle soluzioni alla seguente famiglia di funzioni.

DEFINIZIONE 1.2 *Per ogni $T > 0$, sia*

$$\mathcal{E}([0,T]) = \{u \in C(\overline{S}_T) \mid \exists M > 0,\ 0 < \beta < 2 \text{ t.c. } |u(x,t)| \leq M e^{|x|^\beta}\ \forall (x,t) \in \overline{S}_T\}$$

Inoltre diciamo che $u \in \mathcal{E}([0,\infty[)$ se $u|_{\overline{S}_T} \in \mathcal{E}([0,T])$ per ogni $T > 0$.

In seguito sarà utile anche la seguente

DEFINIZIONE 1.3 *$\mathcal{A}$ è l'insieme delle funzioni non-negative $a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, tali che $\nabla a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Il risultato principale che proveremo è il seguente

TEOREMA 1.4

a) Sia $0 < \alpha Q < 2$. Sia $a \in \mathcal{A}$, non identicamente nulla. Allora non esiste soluzione globale di (PC) in $\mathcal{E}([0,\infty[)$;

b) Sia $\alpha Q > 2$. Per ogni $\gamma > 0$ esiste $\delta = \delta_\gamma > 0$ tale che se $a \in C(\mathbb{R}^N)$ e $a(x) \leq \delta\Gamma(x,\gamma)$, $x \in \mathbb{R}^N$, allora il problema (PC) ha una soluzione globale regolare u tale che

$$u(x,t) \leq M\Gamma(x,t+\gamma) \qquad \text{in } S_\infty,$$

con $M > 0$ costante opportuna.

È utile fare alcune osservazioni in merito al teorema precedente. Innanzi tutto l'ipotesi sulla non-negatività delle soluzioni è cruciale: in [6] è provata l'esistenza di soluzioni globali (di segno misto) di (PC) per l'equazione $u_t = \Delta u + |u|^\alpha u$ anche se $\alpha N \leq 2$.

Rimane da analizzare il caso critico $\alpha Q = 2$. Ricordiamo che il problema, per l'operatore del calore $\Delta - \partial_t$, è stato risolto, da diversi autori: in questo caso non c'è esistenza globale (cfr. [17] e la relativa bibliografia).

I risultati di Fujita sono stati estesi in [16] al caso di soluzioni in L^p e sono tuttora oggetto di interesse per le numerose possibili generalizzazioni. Ci riserviamo di approfondire, in un lavoro futuro, questi problemi e di estendere e completare i presenti risultati.

Nel paragrafo 3, diamo una traccia della dimostrazione del Teorema 1.4. Nel secondo paragrafo stabiliamo alcuni risultati preliminari fra i quali il seguente

TEOREMA 1.5 *Sia $a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $u \in \mathcal{E}([0,T])$, $T > 0$; u è una soluzione regolare di (PC) in S_T se e soltanto se $u \geq 0$ e*

$$u(z) = u_0(z) + \Phi u(z), \qquad z \in \overline{S}_T, \tag{1.9}$$

$c\left(\frac{1}{t}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{t}\right) \geq \left(\frac{1}{t}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{\delta^2}{t}\right)$

dove

$$u_0(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;y,0)a(y)dy, \geq \int_{|y|\leq\delta} \Gamma \geq \tag{1.10}$$

$\geq c$

$$\Phi u(z) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z;\zeta)(u(\zeta))^{1+\alpha} d\zeta. \tag{1.11}$$

È importante rilevare che soluzioni locali di (PC) esistono sempre. Vale infatti il seguente teorema la cui dimostrazione, basata su un'applicazione standard del teorema del punto fisso di Banach-Cacciopoli e sull'utilizzo della formula di rappresentazione del Teorema 1.5, rinviamo all'appendice.

TEOREMA 1.6 *Consideriamo il problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} Lu = -f(u), & \text{in } S_T = \mathbb{R}^N \times]0,T[\\ u(x,0) = a(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.12}$$

dove $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e* $T > 0$. *Esiste* $T_0 > 0$ *(che dipende solo da* f *e* a*) tale che (1.12) ha una (e una sola) soluzione regolare* u *in* $C(\overline{S}_{T_0}, [-2\|a\|_\infty, 2\|a\|_\infty])$.

$t T_0 < \frac{1}{\varepsilon}$

Ringraziamo il prof. Lanconelli per aver proposto il presente problema e il dott. Polidoro per alcune utili discussioni.

2 Formula di rappresentazione

In questo paragrafo tracciamo le linee essenziali della prova del Teorema 1.5. Premettiamo il seguente lemma.

LEMMA 2.1 *Siano* $z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$, *con* $z \neq \zeta$, *e* $i \in \mathbb{N}$ *tale che* $1 \leq i \leq p_0$. *Allora esiste una costante positiva* c *tale che*

$$|\partial_{x_i}\Gamma(z;\zeta)| \leq \frac{c}{(t-s)^{\frac{Q+1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{9}|C^{-\frac{1}{2}}(t-s)(x-E(t-s)y)|^2\right).$$

Dimostrazione del Teorema 1.5. [*Necessità*] $\Rightarrow$

Dividiamo la prova in alcuni passi:

(1) Indichiamo

$$P = \operatorname{div}(A\nabla) + < x, B\nabla >$$

Per H, $P = \Delta_x$

in modo che $L = P - \partial_t$. Allora vale

sol. regol. di (Pc)

$$\partial_t v_n = P v_n + \rho_n u^{1+\alpha} - 2 < A\nabla\rho_n, \nabla u > -u(P\rho_n) \tag{2.13}$$

dove $v_n = u\rho_n$, $n \in \mathbb{N}$, e ρ_n è una funzione "cut-off" definita da $\rho_n(x) = \rho(\frac{x}{n})$, se $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 \le \rho \le 1$ e tale che $\rho(x) = 1$ per $|x| \le 1$, $\rho(x) = 0$ per $|x| \ge 2$.

(2) Se $0 < \varepsilon < t$, da (2.13), si ottiene

$$v_n = I_1^{(\varepsilon)} + I_2^{(\varepsilon)} - 2I_3^{(\varepsilon)} - I_4^{(\varepsilon)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.14}$$

dove

$$I_1^{(\varepsilon)} = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z; y, \varepsilon)\rho_n(y)a(y)dy,$$

x, t

$$I_2^{(\varepsilon)} = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z; \zeta)\rho_n(y)u^{1+\alpha}(\zeta)d\zeta,$$

y, τ

$$I_3^{(\varepsilon)} = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z; \zeta) < A\nabla_y\rho_n(y), \nabla_y u(\zeta) > d\zeta,$$

$$I_4^{(\varepsilon)} = \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z; \zeta)u(\zeta)(P\rho_n)(y)d\zeta.$$

(3) Si prova infine che

$$I_1^{(\varepsilon)} \to \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z; y, \varepsilon)a(y)dy, \qquad \text{per } n \to \infty;$$

$$I_2^{(\varepsilon)} \longrightarrow \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z; \zeta)(u(\zeta))^{1+\alpha}d\zeta \qquad \text{per } n \to \infty;$$

$$I_3^{(\varepsilon)}, I_4^{(\varepsilon)} \to 0, \qquad \text{per } n \to \infty.$$

$v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} u$

Si conclude facendo tendere ε a zero.

[*Sufficienza*]

Proviamo un risultato più generale rispetto a quello enunciato: siano $a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$ e $f(t) = O(t^{1+\alpha})$ per $t \to \infty$ per qualche α positivo. Se $T > 0$ e $u \in \mathcal{E}([0,T])$ è una soluzione in $\overline{S}_T$ dell'equazione integrale

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;y,0)a(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z;\zeta)f(u(\zeta))d\zeta \equiv u_0(z) + \Phi u(z), \qquad (2.15)$$

allora u è una soluzione regolare di (1.12) in S_T.

Dividiamo la prova in tre passi.

(1) Poichè $a \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, si ha che $Lu_0 = 0$ in S_T; inoltre, per la (1.6), abbiamo

$$\lim_{t \to 0+} u_0(z) = a(x).$$

(2) Proviamo la tesi supponendo che f sia limitata. In questo caso, procedendo come in [14], Teor.1.4, otteniamo che Φu è hölderiana in S_T. Allora, la rappresentazione integrale (2.15) implica che u è hölderiana in S_T. Dunque (si veda, per esempio, la prova del Teor.1.4 in [14])

$$L\Phi u = -f(u) \qquad \text{in } S_T.$$

Infine, da (1.6), otteniamo

$$\lim_{t \to 0+} \Phi u(z) = 0.$$

(3) Consideriamo ora il caso generale. Fissiamo $z_0 \in S_T$ e consideriamo una funzione $w \in C^\infty$ con supporto in un intorno opportuno di z_0. Allora

$$\Phi u(z) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z;\zeta)w(\zeta)f(u(\zeta))d\zeta +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z;\zeta)(1 - w(\zeta))f(u(\zeta))d\zeta \equiv \Phi_1 u(z) + \Phi_2 u(z)$$

dove, come sopra, $\Phi_1 u$ è hölderiana in S_T. D'altra parte, $\Phi_2 u$ è C^∞ in un intorno di z_0 poichè $(1 - w)f(u)$ è identicamente nulla in un intorno di z_0. Quindi Φu è localmente hölderiana e di conseguenza, per la (2.15), anche u è localmente hölderiana. Tale è anche $f(u)$, in virtù della lipschitzianità di f. Per verificare che u è una soluzione di (1.12) in S_T, fissiamo ancora z_0 e w come sopra. Allora

$$L\Phi u(z_0) = L\Phi_1 u(z_0) + L\Phi_2 u(z_0) = -w(z_0)f(u(z_0)) = -f(u(z_0)).$$

□

COROLLARIO 2.2 *Se u è una soluzione regolare di (PC), con $a \not\equiv 0$, allora $u(z) > 0$ per ogni $z = (x,t)$ con $t > 0$, e $u \in C^\infty(S_T)$.*

Proof. Dal Teorema 1.5 segue chiaramente che $u(x,t)$ è positiva per $t > 0$. Allora, usando il Teorema 16 in [15] e un argomento di bootstrap, si prova facilmente che $u \in C^\infty(S_T)$.

□

3 Teorema di esistenza e non-esistenza

In questo paragrafo accenniamo la dimostrazione del Teorema 1.4; premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 3.1 *Sia u soluzione regolare di (PC) in $\mathcal{E}([0,T])$, $T > 0$; allora $\partial_{x_i} u \in \mathcal{E}([0,T])$ per $1 \le i \le p_0$.*

LEMMA 3.2 *Sia u soluzione regolare di (PC) in $\mathcal{E}([0,T])$, $T > 0$, e sia $a \in \mathcal{A}$, non identicamente nulla. Allora, per ogni $t \in [0,T]$, vale*

$$u_0(0,t)^{-\alpha} - u(0,t)^{-\alpha} \ge \alpha t.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $t \in]0,T]$. Poniamo

$$V_\varepsilon(x,s) = \Gamma(0,t+\varepsilon;x,s), \qquad (x,s) \in \overline{Q}_t;$$

$$J_\varepsilon(s) = \int_{\mathbb{R}^N} V_\varepsilon(x,s)u(x,s)dx, \qquad s \in [0,t].$$

Si prova che $J_\varepsilon \in C([0,t])$ e che esiste

$$\frac{d}{ds}J_\varepsilon(s) = \int_{\mathbb{R}^N} V_\varepsilon(x,s)u(x,s)^{1+\alpha}dx. \tag{3.16}$$

Applicando la diseguaglianza di Jensen a (3.16) e integrando nella variabile s fra 0 e t, si ottiene

$$J_\varepsilon(0)^{-\alpha} - J_\varepsilon(t)^{-\alpha} \ge \alpha t.$$

Si conclude applicando la (1.6).

□

$$J_\varepsilon(0) = \int V_\varepsilon(x,0)\, \underset{u_0(x)}{\underset{\parallel}{u(x,0)}}\, dx = \int \Gamma(0,t,x,0)u(\quad = u_0(t) \geq$$

LEMMA 3.3 *Per ogni $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$ vale*

$$< C^{-1}(t)E(-t)x, x >=< -C^{-1}(-t)x, x > .$$

Concludiamo con la prova del Teorema 1.4:

Dimostrazione del Teorema 1.4.
[*Caso* $0 < \alpha Q < 2$] La tesi è conseguenza del lemma 3.2, una volta che si è osservato che $u_0(0,t) \geq \frac{c}{t^{\frac{Q}{2}}}$, per $|x| \leq \delta$ e $t > \delta$, con $c = c(\delta, N, a)$.

[*Caso* $\alpha Q > 2$] Per provare l'esistenza di una soluzione globale di (PC), utilizziamo un procedimento di punto fisso. Perciò, fissato $\gamma > 0$, definiamo

$$\mathcal{V}(S_\infty) = \{u \in C(S_\infty) \ | \ \exists M > 0 \ t.c. |u(z)| \leq M\Gamma(x, t+\gamma), \ \forall z \in S_\infty\}.$$

Proviamo che, se il dato iniziale verifica le ipotesi con δ abbastanza piccolo, allora la successione definita per ricorrenza mediante

$$u_{n+1} = u_0 + \Phi u_n, \qquad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

è tale che $u_n \in \mathcal{V}(S_\infty)$ e converge ad una soluzione di (PC).

□

4 Appendice

Dimostrazione del Teorema 1.6.
Siano $M = 2\|a\|_\infty$, L la costante di Lipschitz della funzione f in $[-M, M]$ e $T_0 = \frac{1}{2L}$. Se definiamo

$$Tu(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;y,0)a(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z;\zeta)f(u(\zeta))d\zeta$$

per ogni $u \in C(\overline{Q}_{T_0}, [-M, M]) =: X$, una facile verifica mostra che T è una contrazione che va da X in X. Allora T ha, in X, un unico punto fisso u che è una soluzione dell'equazione integrale (2.15). Dunque u è anche una soluzione della (1.12). Osserviamo esplicitamente che le condizioni su f richieste nella prova del Teorema 1.5, sono soddisfatte eventualmente modificando f nel complementare di $[-M, M]$.

□

Riferimenti bibliografici

[1] J.M. BALL, *Remarks on blow up and nonexistence theorems for nonlinear evolutionary equations*, Quart. J. Math. Oxford Ser., **28** (1977), 473–486.

[2] A. FRIEDMAN, *Remarks on non-linear parabolic equations*, Proc. of Symposia in Appl. Math., vol. 17 (Applications of non-linear partial differential equations in mathematical physics) (1965), 1–23.

[3] H. FUJITA, *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **13**, (1966), 109–124.

[4] Y. GIGA, R.V. KOHN, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math., **38** (1985), 297–319.

[5] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., **119** (1967), 147–171.

[6] A. HARAUX, F.B. WEISSLER, *Non-uniqueness for a semilinear initial value problem*, Indiana Univ. Math. J., **31** n.2 (1982), 167–189.

[7] S. ITÔ, *On the blowing up of solutions of semi-linear parabolic equations*, Bull. Math. Soc. of Japan (Sûgaku), **18**, n.1 (1966), 44–47.

[8] S. KAPLAN, *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), 305–330.

[9] L.P. KUPTSOV, *The mean value property and the maximum principle for parabolic equation of second order*, Dokl. Acad. Nauk SSSR, **242** (1978), 529–532, (English transl. Soviet Math. Dokl., **19** (1978), 1140–1144).

[10] L.P. KUPTSOV, *Fundamental solution of certain degenerate second order parabolic equations*, Mat. Zametki, **31** (1982), 559–570 (English transl. Math. Notes, **31** (1982), 283–289).

[11] E. LANCONELLI, S. POLIDORO, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Pol. Torino, **51.4** (1993), 137–171.

[12] H.A. LEVINE, *On some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Rational Mech. Anal., **51** (1973), 371–386.

[13] H.A. LEVINE, *The role of critical exponents in blowup theorems*, SIAM Review, **32** n.2 (1990), 262–288.

[14] M. MANFREDINI, *The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations*, preprint.

[15] L.P. ROTHSCHILD, E.M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators on nilpotent groups*, Acta Math., **137** (1977), 247–320.

[16] F.B. WEISSLER, *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math., **38** (1981), 29–40.

[17] F.B. WEISSLER, *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p*, Indiana Univ. Math. J., **29** (1980), 79–102.